ECON 2200, Flervariabel maksimering og omhylning - Handout

Kjell Arne Brekke

February 10, 2011

1 Innledning

Samme oppfordring som vanlig: Prøv deg på oppgavene før forelesningen, men fortvil ikke om du ikke får det til, dette skal jeg gå gjennom.

2 Maksimering med flere variabler

Førsteordensbetingelser

I forrige forelesning så vi på stasjonærpunkter.

Theorem 1 *En deriverbar funksjon $z = f(x, y)$ kan bare ha et maksimum eller minimum i et indre punkt i mengden S dersom det er et* ***stasjonært*** *punkt, dvs*

$$f_1'(x, y) = 0 \text{ og } f_2'(x, y) = 0$$

Eksempel

Funksjonen

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

gir førsteordensbetingelser

$$\begin{aligned} f_x' &= -2x = 0 \\ f_y' &= -2y = 0 \end{aligned}$$

som betyr at

$$x_0 = y_0 = 0$$

er et stasjonærpunkt.

Vi kan lett fastslå at det ikke kan være et minimum. Vi repeter først hva minimumspunt betyr:

Definition 2 *Punktet (x_0, y_0) er et minimum dersom*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \text{ for alle } x, y \text{ (i definisjonsområdet)}$$

Klarer vi å finne **ett eneste** punkt (x, y) der

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

er det altså ikke et minimum.

Oppgave 1 *Vis at* $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ *om vi velger* $x = y = 1$.

Siden det holder med ett moteksempel, så kunne vi se på punkter (x, y) der $y = y_0$. Vi endrer altså bare på x. Da kan vi tenke på det som en funksjon av en variabel

$$g(x) = f(x, y_0) = -x^2$$

Med metodene for maksimering av funksjoner av en variabel vet vi at denne funksjonen har et **maksimum** i $x = x_0 = 0$. siden det er et stasjonærpunkt og $g''(x) < 0$. Og det er det eneste maksimumspunktet. Altså er $g(x) < g(x_0) = g(0)$ for alle $x \neq 0$, og det betyr også at $f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$ for alle $x \neq x_0$.

Vi kan altså ikke ha et minimum når

$$f''_{xx}(x, y_0) = g''(x) < 0.$$

Skal vi ha et minimum må vi se et smilefjes om vi skjerer et tverrsnitt i x-retning og tilsvarende når vi skjerer et tverrsnitt i y-retning. Vi krever altså

$$f''_{xx} \geq 0,\ f''_{yy} \geq 0$$

Oppgave 2 *Vis at* $(0, 0)$ *er et stasjonærpunkt til funksjonen*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 10xy$$

og regn ut

$$f''_{xx} \text{ og } f''_{yy}$$

Beregn så verdiene

$$f(0, 0),\ f(1, 1) \text{ og } f(-1, 1)$$

og bruk dette til å avgjøre om stasjonærpunktet kan være et minimum eller maksimum.

2.1 Tilstrekkelige betingelser

Uten videre begrunnelse får du nå de tilstrekkelige betingelsene vi trenger.

Theorem 3 (Setning 13.1.1 (s 471)) *La* (x_0, y_0) *være et indre stasjonært punkt for funksjonen* f.
a) (Konkav f*) Dersom for alle* (x, y)

$$f''_{xx} \leq 0,\ f''_{yy} \leq 0 \text{ og } f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$$

så er (x_0, y_0) *et maksimumspunkt*
b) (Konveks f*) Dersom for alle* (x, y)

$$f''_{xx} \geq 0,\ f''_{yy} \geq 0 \text{ og } f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$$

så er (x_0, y_0) *et maksimumspunkt*

Oppgave 3 *Betrakt funksjonen*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

her er $x_0 = y_0 = 0$ et stasjonærpunkt. Bruk teoremet ovenfor til å vise at det er et minimum.

3 Omhylningsteoremet

Vi definerer her en funksjon

$$g(p) = \max_x f(x, p)$$

Løsningen på maksimeringsproblemet x^* vil avhenge av verdien på p, så vi skriver den som $x^*(p)$. Det betyr at

$$g(p) = f(x^*(p), p)$$

Omhylningsteoremet sier så at

$$g'(p) = f_p(x^*(p), p)$$

Et typisk økonomisk eksempel er

$$g(p) = \max_x \left(px - \frac{1}{2}x^2 \right)$$

der px er salgsverdien av x enheter av en vare til pris p og $\frac{1}{2}x^2$ er kostnadene, og $px - \frac{1}{2}x^2$ blir da profitt.

Oppgave 4 *(Denne vil nok være vanskelig, men prøv så langt du klarer!!)*
a) Løs maksimeringsproblemet

$$\max_x \left(px - \frac{1}{2}x^2 \right)$$

og vis at $x^*(p) = p$. (Om det hjelper, tenk på $x^*(p)$ som det profittmaksimerende valget gitt prisen p.)
b) Bruk så $g(p) = f(x^*(p), p)$ til å vise at

$$g(p) = \max_x \left(px - \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{1}{2}p^2$$

c) Regn til slutt ut $g'(p)$ direkte fra formelen ovenfor eller ved å bruke kjerneregelen på $g(p) = f(x^*(p), p)$

$$g(p) = f'_x(x^*(p), p)x^{*\prime}(p) + f'_p(x^*(p), p)$$

og vis at du får samme svar.